7 класс

1. У Пети есть станок для очистки грецких орехов. Петя покупает неочищенные орехи по 300 р/кг, а продаёт очищенные по 800 р/кг. Когда Петя решил не выбрасывать скорлупу, а продавать её для растопки каминов по 10 р/кг, его доход от очистки килограмма орехов увеличился на 5%. Какую долю массы ореха составляет скорлупа?

   Ответ: 50%

   Решение. Пусть x – доля скорлупы, а 1-x – доля ядер в орехах. Петя тратит 300 р на покупку килограмма неочищенных орехов и получает 800(1-x) р от продажи очищенных орехов. Доход составляет y=500 - 800x рублей. По условию, доход от продажи скорлупы равен 10x=0.05y=25-40x рублей. Значит, 50x=25 и x=0.5.

2. Пирамидка собрана из 2 красных, 2 жёлтых, 2 зелёных и 2 синих колечек. Между любыми 2 колечками одного цвета найдётся хотя бы одно колечко каждого из 3 остальных цветов. Известно, что жёлтые колечки не граничат с зелёными. Докажите, что красные колечки не граничат с синими.

   Например, пирамидка выглядит так  . Доказательство должно работать для всех случаев расположения колечек.

   Решение. Лемма. Между любыми двумя одноцветными колечками находится ровно 3 колечка.

   Доказательство леммы. Предположим противное. Пусть между какими-то двумя колечками цвета x находятся хотя бы 4 колечка трёх других цветов. По принципу Дирихле, среди них есть 2 одноцветных. Но между этими одноцветными колечками нет колечек цвета x, что противоречит условию. Лемма доказана.

   Пронумеруем колечки сверху вниз. По лемме, номера одноцветных колечек (1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8). Не граничат между собой только пары, номера колечек в которых одной чётности. Значит, номера жёлтых и зелёных колечек одной чётности, а номера красных и синих другой чётности. Значит, красные не граничат с синими, ч.т.д.

   Критерии. Разобран только случай, указанный в примере - 0 баллов.

   Чёткая формулировка и доказательство леммы (или аналогичного верного утверждения) - 2 балла.

   Утверждается без обоснования, что колечки расположены так, как в примере, с точностью до перемены цветов – не более 2 баллов.

3. На доске написано число 2024. Если на доске написано число x, можно записать 1/x. Если написаны 2 неравных числа x, y, можно записать x+y. Можно ли за несколько таких операций получить 1?

   Например, можно записать $\frac{1}{2024}$, а потом ещё одно число 2024, но 2024+2024=4048 сразу написать не получится, поскольку числа, которые мы хотим сложить, равны.

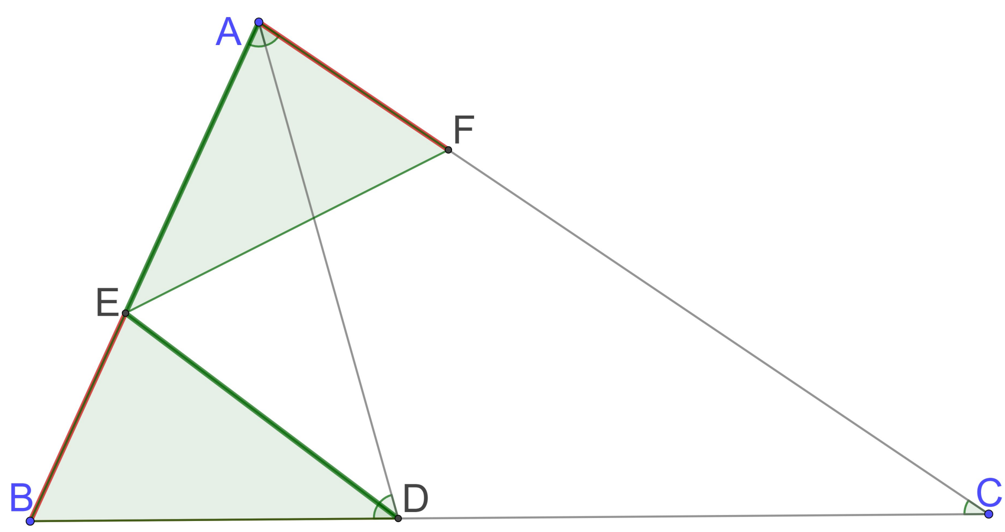
Решение. Запишем $\frac{1}{2024}$. Будем прибавлять $\frac{1}{2024}$ к 2024 до тех пор, пока не получим 4048. Запишем $\frac{1}{4048}$. Будем прибавлять $\frac{1}{4048}$ к $\frac{1}{2024}$ до тех пор, пока не получим 1.

Критерии. Ответ (да/нет) без решения - 0 баллов.

Показано, как получить любое натуральное число, большее 2024 - 1 балл.

4. Отрезок AD - биссектриса угла A треугольника ABC, в котором $\angle A = 2\angle C$. Отрезок DE - биссектриса угла D треугольника ADB. Точка F на отрезке AC такова, что BE = AF. Докажите, что BD = EF.

Решение.



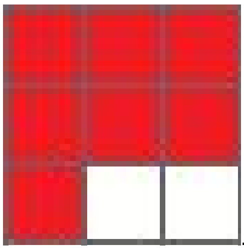
Поскольку $\angle A = 2\angle C$, биссектриса делит $\angle A$ на 2 части, равных $\angle C$. Внешний угол $\angle ADB$ равнобедренного треугольника ADC равен $2\angle C$. Биссектриса делит его на 2 части, равных $\angle C$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, а прямые AC и DE параллельны. Угол $\angle BED = 2\angle C$, и треугольники AEF и EDB равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, BD=EF.

Критерии. Решение для треугольника ABC с конкретными углами (например, $\angle A = 60°, \angle B = 90°$, $\angle C = 30°$) не оценивается.

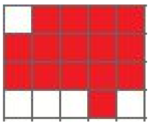
Вычислены углы $\angle BED, \angle BDE$ - 1 балл.

Вычислены углы $\angle BED, \angle BDE$, доказана параллельность прямых AC и DE и доказано равенство AE=DE - 2 балла.

5. Барон Мюнхгаузен вырезал из клетчатой бумаги по линиям сетки многоугольник, состоящий более, чем из одной клетки. Для каждой прямой, проходящей по линии сетки и пересекающей этот многоугольник, барон выписал площади всех частей, на которые она разбивает многоугольник. Он утверждает, что все полученные числа различны. Не ошибается ли барон?

Пример: красный многоугольник . Одна линия сетки разбивает его прямоугольник 1x3 и квадрат 2x2. Другая – на квадрат 1x1 и прямоугольник 2x3. Ещё 2 – на части площади 5 и 2 или 3 и 4. Мюнхгаузен выпишет 3, 4, 1, 6, 5, 2, 3, 4, но среди этих 8 чисел есть одинаковые.

Ответ: барон прав

Пример: 

Площади: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (всего 7 способов разреза) и 14 различных площадей.

Любой верный пример - 7 баллов.

8 класс

1. Легковая машина едет со скоростью 100 км/ч. В 12.00 она обогнала грузовик. Через какое-то время после этого она на 15 минут остановилась на заправке, а потом в 13.00 обогнала тот же самый грузовик. С какой скоростью едет грузовик? Считайте, что грузовик всё время ехал по дороге с постоянной скоростью.

   Ответ: 75 км/ч

   Решение. Машина проехала за 45 минут то же расстояние, что и грузовик за час. Это 75 километров.

   Критерии. Верный ответ получен только для случая, когда задано время, когда машина встала на заправку (например, 12.15) - 2 балла.

2. Отрезок AD - биссектриса угла A треугольника ABC, в котором $\angle A = 2\angle C$. Отрезок DE - биссектриса угла D треугольника ADB. Точка F на отрезке AC такова, что BE = AF. Докажите, что BD = EF.

   См. задачу 7.4.

3. Вася сделал n карточек с различными цифрами. При каком наименьшем n Петя сможет выложить из них квадрат натурального числа вне зависимости от действий Васи?

   Пример. Если у Пети есть карточка «6», её можно перевернуть, получив 9 – квадрат натурального числа. Если у Пети есть только «3», «5» и «0», квадрат натурального числа выложить не получится. Требуется указать ответ n и способ выложить n-1 карточку, чтобы Петя не смог выложить квадрат натурального числа (с обоснованием того, что этот способ работает). Также нужно доказать, что из любых n карточек Петя может выложить квадрат натурального числа.

   Ответ: n=6.

   Пример: Вася выложит 0, 2, 3, 7, 8. Не существует точных квадратов, кончающихся на 2, 3, 7, 8, а квадраты, кончающиеся на 0, кончаются на 00.

   Оценка. Если Вася выложит 1, 4, 6 или 9, то Петя получит 1, 4 или 9 – точный квадрат. Если Вася выложит 0, 2, 3, 5, 7, 8, то Петя получит 25. В остальных случаях, Вася выложит не более 5 карточек.

Критерии. Ответ без обоснования - 0 баллов.

Ответ+пример с обоснованием - 4 балла. Если пример без обоснования – снимается 2 балла.

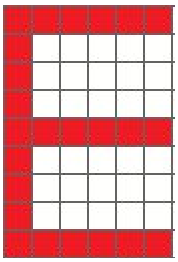
Ответ+оценка (возможно, с неработающим примером) - 2 балла.

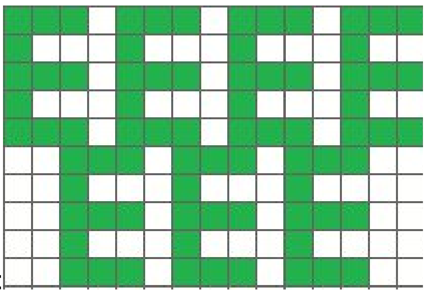
4. На доске написано действительное число а. Если на доске написано число x, можно записать 1/x. Если написаны 2 неравных числа x, y, можно записать x+y. Всегда ли за несколько таких операций получить 2a?

Пример: если $a = \sqrt{2}$, пишем $\frac{1}{\sqrt{2}}$, потом $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$, затем $\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Ответ: всегда, кроме a=1.

5. Барон Мюнхгаузен вырезал из клетчатой бумаги по линиям сетки многоугольник, состоящий более, чем из одной клетки. Барон утверждает, что каждая прямая, проходящая по линии сетки и пересекающая этот многоугольник, разбивает многоугольник более, чем на 2 части. Не ошибается ли барон? Многоугольник - часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной без самопересечений.

Пример: красный многоугольник  не подходит, поскольку верхний прямоугольник 1х6 можно отрезать от остальной части горизонтальной прямой, при этом образуются только 2 части.

Ответ: 

Любой верный пример - 7 баллов.

9 класс

1. Легковая машина едет со скоростью 100 км/ч. В 12.00 она обогнала грузовик. Через какое-то время после этого она на 15 минут остановилась на заправке, а потом в 13.00 обогнала тот же самый грузовик. С какой скоростью едет грузовик? Считайте, что грузовик всё время ехал по дороге с постоянной скоростью.

Решение. См. 8.1.

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC, вневписанная окружность с центром J касается отрезка AC в точке K. Отрезок JK пересекает описанную окружность ABC в точке X. Может ли угол BAX быть прямым?

Ответ: нет.

Решение. Предположим противное. Тогда X диаметрально противоположна B в окружности (ABC). Проекция K точки X на AC и проекция H точки B на AC симметричны относительно проекции M центра O окружности (ABC) на AC. Поскольку M – середина AC, H – точка, симметричная K относительно M – точка касания вписанной окружности треугольника ABC. Значит, центр вписанной окружности лежит на высоте BH, и треугольник ABC равнобедренный, противоречие.

Критерии. Доказано, что в равнобедренном треугольнике угол BAX прямой - 0 баллов.

3. Вася сделал n карточек с различными цифрами. При каком наименьшем n Петя вне зависимости от действий Васи сможет выложить из них квадрат натурального числа? Карточки «6» и «9» (если они есть) разные, их нельзя переворачивать.

Требуется указать ответ n и способ выложить n-1 карточку, чтобы Петя не смог выложить квадрат натурального числа (с обоснованием того, что этот способ работает). Также нужно доказать, что из любых n карточек Петя может выложить квадрат натурального числа.

Пример: Вася выложит 0, 2, 3, 7, 8. Не существует точных квадратов, кончающихся на 2, 3, 7, 8, а квадраты, кончающиеся на 0, кончаются на 00.

Оценка. Если Вася выложит 1, 4 или 9, то Петя получит 1, 4 или 9 – точный квадрат. Если Вася выложит 2 и 5, то Петя получит 25. Если Вася выложит 3 и 6, Петя получит 36. Если Вася выложит не более одного числа из пары (2, 5) и не более одного из (3, 6), а также, возможно, 7, 8, 0, то Вася выложит не более 5 карточек.

Критерии. Ответ без обоснования - 0 баллов.

Ответ+пример с обоснованием - 3 балла. Если пример без обоснования – снимается 2 балла.

Ответ+оценка (возможно, с неработающим примером) - 3 балла.

4. Петя выписал 3 различных неотрицательных числа. Вася посчитал сумму x каких-то двух из Петиных чисел и разность y каких-то двух (тех же или других) Петиных чисел. Вася хочет, чтобы отношение k=x/y было максимально. Какого наибольшего $k = k_{max}$ Вася может добиться вне зависимости от действий Пети?

Пример. Если Петя выписал 3, 4, 6, Вася получит $\frac{6+4}{4-3} = 10$. Требуется найти k_{max}, указать пример Петиных чисел, когда Вася не может получить $k > k_{max}$, доказать, что Вася всегда может получить $k \geq k_{max}$.

Ответ: k=3.

Пример. Петя выписал 0, 1, 2.

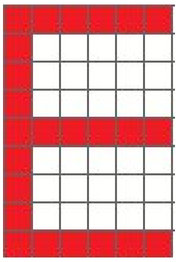
Оценка. Пусть Петя выписал a<b<c. Если $2b \geq a + c \geq c$, то $\frac{c+b}{c-b} = 1 + 2\frac{b}{c-b} \geq 3$. Если $2b \leq a + c$, то $\frac{c+b}{b-a} \geq \frac{3b-a}{b-a} = 3 + \frac{2a}{b-a} \geq 3$.

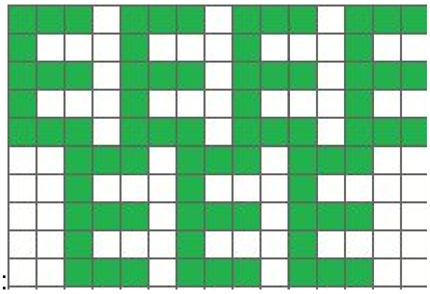
Ответ+пример - 1 балл

Числа упорядочены и показано, что наибольшая дробь - $\frac{c+b}{c-b}$ или $\frac{c+b}{b-a}$ - 1 балл (суммируется с баллом за пример).

5. Барон Мюнхгаузен вырезал из клетчатой бумаги по линиям сетки многоугольник, состоящий более, чем из одной клетки. Барон утверждает, что каждая прямая, проходящая по линии сетки и пересекающая этот многоугольник, разбивает многоугольник более, чем

на 3 части. Не ошибается ли барон? Многоугольник - часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной без самопересечений.

Пример: красный многоугольник  не подходит, поскольку верхний прямоугольник 1x6 можно отрезать от остальной части горизонтальной прямой, при этом образуются только 2 части.

Ответ: 

Любой верный пример - 7 баллов.