7 класс. Первая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. У купца Никодима есть гирьки: 1 кг, 2 кг, 3 кг, 3 кг, 5 кг, 5 кг, 6 кг. Придумайте, какую ещё гирьку можно ему дать, чтобы все его гирьки можно было разложить на четыре группы одинаковой массы и можно — на две группы одинаковой массы.
2. На поляну прилетели 33 весёлых чижа. Некоторые склевали по 5 гусениц, а остальные — по 2 гусеницы. Если бы вместо этого все чижи склевали по 3 гусеницы, то получилось бы склевать на 33 гусеницы меньше. Сколько чижей склевали по 5 гусениц?
3. Известно, что $\angle BOC = 2\angle AOB$, $\angle AOB$ — острый. Угол между биссектрисами $\angle AOB$ и $\angle BOC$ равен 33°. Чему может быть равен $\angle AOB$?
4. На лавочке сидят 5 гномов. Каждый из них либо рыцарь (говорит только правду), либо лжец (говорит только неправду). Каждый гном, кроме сидящего правее всех, заявил: «Правее меня сидят только лжецы!» Сколько лжецов могло оказаться на лавочке? Найдите все варианты и обоснуйте, почему нет других.
5. В городе Давилоне в обращении используются только монеты в 8 фертингов и в 5 фертингов. Какое наибольшее целое число фертингов может стоить шоколадка, чтобы за неё нельзя было расплатиться такими монетами?

*VIII городской турнир любителей математики,
посвящённый памяти заслуженного учителя Российской Федерации
Игоря Васильевича Чуя • г. Ярославль • 20 февраля 2021 г.*

7 класс. Первая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. У купца Никодима есть гирьки: 1 кг, 2 кг, 3 кг, 3 кг, 5 кг, 5 кг, 6 кг. Придумайте, какую ещё гирьку можно ему дать, чтобы все его гирьки можно было разложить на четыре группы одинаковой массы и можно — на две группы одинаковой массы.
2. На поляну прилетели 33 весёлых чижа. Некоторые склевали по 5 гусениц, а остальные — по 2 гусеницы. Если бы вместо этого все чижи склевали по 3 гусеницы, то получилось бы склевать на 33 гусеницы меньше. Сколько чижей склевали по 5 гусениц?
3. Известно, что $\angle BOC = 2\angle AOB$, $\angle AOB$ — острый. Угол между биссектрисами $\angle AOB$ и $\angle BOC$ равен 33°. Чему может быть равен $\angle AOB$?
4. На лавочке сидят 5 гномов. Каждый из них либо рыцарь (говорит только правду), либо лжец (говорит только неправду). Каждый гном, кроме сидящего правее всех, заявил: «Правее меня сидят только лжецы!» Сколько лжецов могло оказаться на лавочке? Найдите все варианты и обоснуйте, почему нет других.
5. В городе Давилоне в обращении используются только монеты в 8 фертингов и в 5 фертингов. Какое наибольшее целое число фертингов может стоить шоколадка, чтобы за неё нельзя было расплатиться такими монетами?

8 класс. Первая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. У купца Никодима есть гирьки: 3 кг, 5 кг, 5 кг, 7 кг, 7 кг. Придумайте, какую ещё гирьку можно ему дать, чтобы все его гирьки можно было разложить на две группы одинаковой массы, а можно — на три группы одинаковой массы.
2. Сергей выписал пять подряд идущих натуральных чисел. Олег стёр самое большое из них, а остальные четыре числа увеличил на 33 (каждое). У него получилась такая же сумма чисел, как у Сергея. Какая?
3. Произведение двух целых чисел оказалось на 33 больше их суммы. Какие это могли быть числа? Найдите все возможные варианты.
4. Угол между биссектрисами двух углов равнобедренного треугольника равен 33°. Чему может быть равен угол между его боковыми сторонами?
5. В городе Давилоне в обращении используются только монеты в 9 фертингов и в 5 фертингов. Какое наибольшее целое число фертингов может стоить шоколадка, чтобы за неё нельзя было расплатиться такими монетами?

*VIII городской турнир любителей математики,
посвящённый памяти заслуженного учителя Российской Федерации
Игоря Васильевича Чуя • г. Ярославль • 20 февраля 2021 г.*

8 класс. Первая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. У купца Никодима есть гирьки: 3 кг, 5 кг, 5 кг, 7 кг, 7 кг. Придумайте, какую ещё гирьку можно ему дать, чтобы все его гирьки можно было разложить на две группы одинаковой массы, а можно — на три группы одинаковой массы.
2. Сергей выписал пять подряд идущих натуральных чисел. Олег стёр самое большое из них, а остальные четыре числа увеличил на 33 (каждое). У него получилась такая же сумма чисел, как у Сергея. Какая?
3. Произведение двух целых чисел оказалось на 33 больше их суммы. Какие это могли быть числа? Найдите все возможные варианты.
4. Угол между биссектрисами двух углов равнобедренного треугольника равен 33°. Чему может быть равен угол между его боковыми сторонами?
5. В городе Давилоне в обращении используются только монеты в 9 фертингов и в 5 фертингов. Какое наибольшее целое число фертингов может стоить шоколадка, чтобы за неё нельзя было расплатиться такими монетами?

9 класс. Первая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. Сергей выписал пять подряд идущих натуральных чисел. Олег стёр два самых больших из них, а остальные три числа увеличил на 33 (каждое). У него получилась такая же сумма чисел, как у Сергея. Какая?

2. Существует ли квадратное уравнение, у которого один из коэффициентов равен 33 и один из корней равен 33?

3. Есть круглая беговая дорожка длиной 400 метров. На отметке «Старт» — бегун Алексей, а где-то на дорожке — бегун Борис. Алексей и Борис побежали навстречу друг другу и впервые встретились на отметке «Финиш» (100 метров от старта). Если бы Борис бежал так же, а Алексей побежал в другую сторону, то Борис догнал бы Алексея, когда тот впервые оказался на отметке «Финиш». Во сколько раз скорость Бориса больше скорости Алексея?

4. На сторонах AB, BC, CA равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечены соответственно точки K, L, M так, что $AK = BL = CM$. Оказалось, что треугольник KLM — равносторонний. Докажите, что и треугольник ABC — равносторонний.

5. В школьном турнире по футболу приняли участие 8 команд, каждая из которых сыграла с каждой другой ровно по одной игре. За победу в игре давали 3 очка, за поражение — 0 очков, при ничьей обе команды получали по 1 очку. Главный судья считает, что команда выступила *неплохо*, если она набрала не меньше половины от наибольшего возможного в турнире числа очков. Какое количество команд могло выступить неплохо в таком турнире?

*VIII городской турнир любителей математики,
посвящённый памяти заслуженного учителя Российской Федерации
Игоря Васильевича Чуя • г. Ярославль • 20 февраля 2021 г.*

9 класс. Первая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. Сергей выписал пять подряд идущих натуральных чисел. Олег стёр два самых больших из них, а остальные три числа увеличил на 33 (каждое). У него получилась такая же сумма чисел, как у Сергея. Какая?

2. Существует ли квадратное уравнение, у которого один из коэффициентов равен 33 и один из корней равен 33?

3. Есть круглая беговая дорожка длиной 400 метров. На отметке «Старт» — бегун Алексей, а где-то на дорожке — бегун Борис. Алексей и Борис побежали навстречу друг другу и впервые встретились на отметке «Финиш» (100 метров от старта). Если бы Борис бежал так же, а Алексей побежал в другую сторону, то Борис догнал бы Алексея, когда тот впервые оказался на отметке «Финиш». Во сколько раз скорость Бориса больше скорости Алексея?

4. На сторонах AB, BC, CA равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечены соответственно точки K, L, M так, что $AK = BL = CM$. Оказалось, что треугольник KLM — равносторонний. Докажите, что и треугольник ABC — равносторонний.

5. В школьном турнире по футболу приняли участие 8 команд, каждая из которых сыграла с каждой другой ровно по одной игре. За победу в игре давали 3 очка, за поражение — 0 очков, при ничьей обе команды получали по 1 очку. Главный судья считает, что команда выступила *неплохо*, если она набрала не меньше половины от наибольшего возможного в турнире числа очков. Какое количество команд могло выступить неплохо в таком турнире?

7 класс. Высшая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. У Винни-Пуха две одинаковые бочки мёда. Из первой он съел 33% мёда, а во второй осталось 33% мёда. В первой бочке на 17 литров мёда больше, чем во второй. Сколько мёда в двух этих бочках в сумме?
2. Известно, что $\angle BOC = 2\angle AOB$, $\angle AOB$ — острый. Угол между биссектрисами $\angle AOB$ и $\angle BOC$ равен 33°. Чему может быть равен $\angle AOB$?
3. На креслах в первом ряду зрительного зала сидят 33 гнома. Каждый из них либо рыцарь (говорит только правду), либо лжец (говорит только неправду). Каждый гном, кроме сидящего на самом правом месте, заявил: «Правее меня сидят только лжецы!» Сколько лжецов могло оказаться на лавочке? Найдите все варианты и обоснуйте, почему нет других.
4. Пусть $P(x)$ — это число x, записанное в десятичной системе счисления справа налево (например, $P(13) = 31$, $P(12345) = 54321$, $P(33) = 33$). Про двузначные числа a, b, c известно, что $a + b = P(c)$, $b + c = P(a)$, $c + a = P(b)$. Чему может быть равно $a + b + c$?
5. На клетки доски 5×5 расставили крестики и нолики (заполнив всю доску). Оказалось, что никакие три крестика не стоят в ряд (ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали). Какое наименьшее количество ноликов могло оказаться на доске?

*VIII городской турнир любителей математики,
посвящённый памяти заслуженного учителя Российской Федерации
Игоря Васильевича Чуя • г. Ярославль • 20 февраля 2021 г.*

7 класс. Высшая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. У Винни-Пуха две одинаковые бочки мёда. Из первой он съел 33% мёда, а во второй осталось 33% мёда. В первой бочке на 17 литров мёда больше, чем во второй. Сколько мёда в двух этих бочках в сумме?
2. Известно, что $\angle BOC = 2\angle AOB$, $\angle AOB$ — острый. Угол между биссектрисами $\angle AOB$ и $\angle BOC$ равен 33°. Чему может быть равен $\angle AOB$?
3. На креслах в первом ряду зрительного зала сидят 33 гнома. Каждый из них либо рыцарь (говорит только правду), либо лжец (говорит только неправду). Каждый гном, кроме сидящего на самом правом месте, заявил: «Правее меня сидят только лжецы!» Сколько лжецов могло оказаться на лавочке? Найдите все варианты и обоснуйте, почему нет других.
4. Пусть $P(x)$ — это число x, записанное в десятичной системе счисления справа налево (например, $P(13) = 31$, $P(12345) = 54321$, $P(33) = 33$). Про двузначные числа a, b, c известно, что $a + b = P(c)$, $b + c = P(a)$, $c + a = P(b)$. Чему может быть равно $a + b + c$?
5. На клетки доски 5×5 расставили крестики и нолики (заполнив всю доску). Оказалось, что никакие три крестика не стоят в ряд (ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали). Какое наименьшее количество ноликов могло оказаться на доске?

VIII городской турнир любителей математики,
посвящённый памяти заслуженного учителя Российской Федерации
Игоря Васильевича Чуя • г. Ярославль • 20 февраля 2021 г.

8 класс. Высшая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. Сергей выписал пять подряд идущих натуральных чисел. Олег стёр самое большое из них, а остальные четыре числа увеличил на 33 (каждое). У него получилась такая же сумма чисел, как у Сергея. Какая?

2. На сторонах AB, BC, CA равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечены соответственно точки K, L, M так, что $AK = BL = CM$. Оказалось, что треугольник KLM — равносторонний. Докажите, что и треугольник ABC — равносторонний.

3. Из Ярославля в Ростов выехал велосипедист Василий. По дороге он обогнал идущего в Ростов пешехода Геннадия, доехал до Ростова, отдохнул там полчаса и выехал обратно — здесь он снова встретил Геннадия (через 2 часа после первой встречи), а в Ярославль прибыл одновременно с тем, как Геннадий добрался до Ростова. Сколько времени требуется Геннадию на путь от Ярославля в Ростов, если он ходит в 4 раза медленнее, чем едет Василий?

4. Найдите все пары положительных чисел x и y, удовлетворяющих условиям: $x \cdot [y] = 7$ и $y \cdot [x] = 8$. (Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a. Например: $[2,9] = 2$, $[33] = 33$, $[4,00002] = 4$.)

5. На клетки доски 5×5 расставили крестики и нолики (заполнив всю доску). Оказалось, что никакие три крестика не стоят в ряд (ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали). Какое наименьшее количество ноликов могло оказаться на доске?

VIII городской турнир любителей математики,
посвящённый памяти заслуженного учителя Российской Федерации
Игоря Васильевича Чуя • г. Ярославль • 20 февраля 2021 г.

8 класс. Высшая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. Сергей выписал пять подряд идущих натуральных чисел. Олег стёр самое большое из них, а остальные четыре числа увеличил на 33 (каждое). У него получилась такая же сумма чисел, как у Сергея. Какая?

2. На сторонах AB, BC, CA равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отмечены соответственно точки K, L, M так, что $AK = BL = CM$. Оказалось, что треугольник KLM — равносторонний. Докажите, что и треугольник ABC — равносторонний.

3. Из Ярославля в Ростов выехал велосипедист Василий. По дороге он обогнал идущего в Ростов пешехода Геннадия, доехал до Ростова, отдохнул там полчаса и выехал обратно — здесь он снова встретил Геннадия (через 2 часа после первой встречи), а в Ярославль прибыл одновременно с тем, как Геннадий добрался до Ростова. Сколько времени требуется Геннадию на путь от Ярославля в Ростов, если он ходит в 4 раза медленнее, чем едет Василий?

4. Найдите все пары положительных чисел x и y, удовлетворяющих условиям: $x \cdot [y] = 7$ и $y \cdot [x] = 8$. (Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a. Например: $[2,9] = 2$, $[33] = 33$, $[4,00002] = 4$.)

5. На клетки доски 5×5 расставили крестики и нолики (заполнив всю доску). Оказалось, что никакие три крестика не стоят в ряд (ни по горизонтали, ни по вертикали, ни по диагонали). Какое наименьшее количество ноликов могло оказаться на доске?

9 класс. Высшая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. Существует ли квадратное уравнение, у которого один из коэффициентов равен 33 и один из корней равен 33?

2. Из Ярославля в Ростов выехал велосипедист Василий. По дороге он обогнал идущего в Ростов пешехода Геннадия, доехал до Ростова, отдохнул там полчаса и выехал обратно — здесь он снова встретил Геннадия (через 2 часа после первой встречи), а в Ярославль прибыл одновременно с тем, как Геннадий добрался до Ростова. Сколько времени требуется Геннадию на путь от Ярославля в Ростов, если он ходит в 4 раза медленнее, чем едет Василий?

3. Точка P внутри ромба $ABCD$ такова, что треугольник PBC — равносторонний. Диагональ CA пересекает биссектрису угла PBA в точке Q. Докажите, что точка P лежит на прямой QD.

4. У Марины есть большой прямоугольный лист бумаги. Одним разрезанием она может разрезать любой (один) имеющийся у неё кусок бумаги от края до края по прямой на два куска. Какое наименьшее количество разрезаний нужно сделать Марине, чтобы получить хотя бы сто 33-угольников?

5. На клетчатую квадратную доску $n \times n$ клеток выкладывается несколько доминошек (клетчатых прямоугольников 1×2) так, что никакая клетка не покрыта более чем одной доминошкой, а сами доминошки не выступают за границы доски. Будем называть покрытие *интересным*, если в каждой строке и в каждом столбце оказалась ровно одна непокрытая клетка.

(а) Докажите, что существует интересное покрытие доски 33×33.

(б) Найдите все n, при которых существует интересное покрытие доски $n \times n$.

VIII городской турнир любителей математики,
посвящённый памяти заслуженного учителя Российской Федерации
Игоря Васильевича Чуя • г. Ярославль • 20 февраля 2021 г.

9 класс. Высшая лига

Уважаемые участники! В предложенных заданиях, как это и принято в задачах традиционных математических олимпиад, требуется привести не только ответ, но и развернутое решение (если в условии явно не указано, что достаточно ответа). Однако приветствуется, если какую-то задачу или полезный факт Вы сможете доказать несколькими способами.

1. Существует ли квадратное уравнение, у которого один из коэффициентов равен 33 и один из корней равен 33?

2. Из Ярославля в Ростов выехал велосипедист Василий. По дороге он обогнал идущего в Ростов пешехода Геннадия, доехал до Ростова, отдохнул там полчаса и выехал обратно — здесь он снова встретил Геннадия (через 2 часа после первой встречи), а в Ярославль прибыл одновременно с тем, как Геннадий добрался до Ростова. Сколько времени требуется Геннадию на путь от Ярославля в Ростов, если он ходит в 4 раза медленнее, чем едет Василий?

3. Точка P внутри ромба $ABCD$ такова, что треугольник PBC — равносторонний. Диагональ CA пересекает биссектрису угла PBA в точке Q. Докажите, что точка P лежит на прямой QD.

4. У Марины есть большой прямоугольный лист бумаги. Одним разрезанием она может разрезать любой (один) имеющийся у неё кусок бумаги от края до края по прямой на два куска. Какое наименьшее количество разрезаний нужно сделать Марине, чтобы получить хотя бы сто 33-угольников?

5. На клетчатую квадратную доску $n \times n$ клеток выкладывается несколько доминошек (клетчатых прямоугольников 1×2) так, что никакая клетка не покрыта более чем одной доминошкой, а сами доминошки не выступают за границы доски. Будем называть покрытие *интересным*, если в каждой строке и в каждом столбце оказалась ровно одна непокрытая клетка.

(а) Докажите, что существует интересное покрытие доски 33×33.

(б) Найдите все n, при которых существует интересное покрытие доски $n \times n$.